МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из предмета

Математика

на тему

Булове алгебре и примене

Ученик:
Николина Илић, IV_a

Ментор:
Милица Мисојчић

Београд, јун 2020.

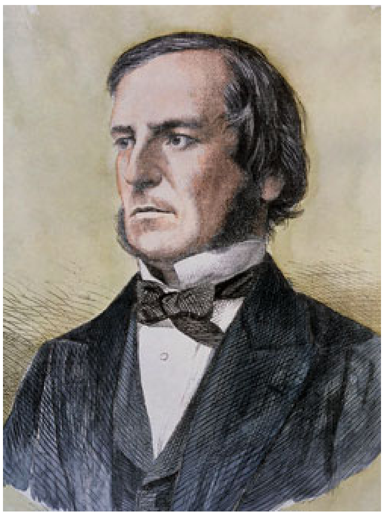
Садржај

1 Увод

Многи проблеми у разним научним дисциплинама попут математике, технике, економије, социологије и медицине могу се превести на проблеме чија су решења "да - не", односно "$1 - 0$". Овим се поспешује и развој електронике и дигиталне технике, затим и Булове алгебре, посебно Булове алгебре на скупу {0,1}.

Џорџ Бул (Линколн, 2. новембар 1815. - Корк, 8. децембар 1864.) био је енглески математичар и филозоф. Већи део свог живота посветио је информатици и математичкој логици, те се сматра творцем посебне области математичке логике која се данас по њему зове Булова алгебра. Његово најважније дело „Истраживање закона мисли на коме се заснива математичка теорија логике и вероватноће“ објављено је 1854. године. У тој књизи Бул прилази логици на нов начин, сажимајући је у просту алгебру, претварајући логику у математику. То је алгебарска структура која сажима основу операција И (AND), ИЛИ (OR), НЕ (NOT), као и скуповних операција као што су унија, пресек и комплемент.

Овај рад састоји се из следећих целина: у другом и трећем поглављу описујемо специјалну алгебарску структуру, Булову алгебру на неком непразном скупу B са две бинарне и једном унарном операцијом. У четвртом поглављу разматрамо Булову алгербу на конкретном скупу $L_2 = \{0, 1\}$, упознајемо се са Буловим изразима и теоремама које важе за те изразе. У петом поглављу објашњена је основна примена Булове алгебре у дигиталним колима. На крају рада дат је закључак и преглед коришћене литературе.



Слика 1: Џорџ Бул

2 Аксиоме и модели Булове алгебре

2.1 Дефиниција и аксиоме

Дат је скуп B са најмање два елемента, у ознаци 0 и I, на коме су дефинисане две бинарне операције, у ознаци " $\cup$ " и " $\cdot$ " (дисјункција и конјукција) и једна унарна операција, у ознаци " $-$ " (негација).

Дефиниција 2.1. На скупу B дефинисана је Булова алгебра ако за све $a, b, c \in B$ важе следеће аксиоме (закони, својства):

1. Својство комутативности
   (A_1) $a \cup b = b \cup a$
   (A_1*) $a \cdot b = b \cdot a$
2. Својство асоцијативности
   (A_2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
   (A_2*) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Својство дистрибутивности
   (A_3) $a \cup (b \cdot c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c)$
   (A_3*) $a \cdot (b \cup c) = (a \cdot b) \cup (a \cdot c)$
4. Својство елемената 0 и I
   (A_4) $a \cup 0 = a$
   (A_4*) $a \cdot I = a$
5. Својство негације
   (A_5) $a \cup \bar{a} = I$
   (A_5*) $a \cdot \bar{a} = 0$

2.2 Модели

У наредном делу навешћемо пар модела Булове алгебре и доказати њихову тачност.

Модел 2.1.
Дат је скуп $L_2 = \{0, 1\}$. На овом скупу можемо увести бинарне операције " $\cup$ " и " $\cdot$ " (дисјункција и конјукција) и унарну операцију " $-$ " (негација) на два начина:

Први начин представљања датих операција:
(i) $0 \cup 0 = 0$ (ii) $0 \cup 1 = 1$
(iii) $1 \cup 0 = 1$ (iv) $1 \cup 1 = 1$
(v) $0 \cdot 0 = 0$ (vi) $0 \cdot 1 = 0$
(vii) $1 \cdot 0 = 0$ (viii) $1 \cdot 1 = 1$
(ix) $\bar{0} = 1$ (x) $\bar{1} = 0$
Овако дефинисане операције на скупу L_2 задовољаваће аксиоме Булове алгебре те овај скуп заиста јесте модел Булове алгебре.

Други начин представљања датих операција:
Операције " $\cup$ " и " $\cdot$ " (дисјункција и конјукција) и операцију " $-$ " (негација) представићемо помоћу табела и показати да тако дефинисане операције на скупу L_2 задовољавају аксиоме Булове алгебре.

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	0	1
$\bar{a}$	1	0

Булову алгебру на скупу L_2 зовемо двочлана Булова алгебра и означавамо је: $(L_2, \cup, \cdot, -)$.

Модел 2.2.
Дат је непразан скуп U. Нека су на партитивном скупу $P(U)$, $P(U) = \{X|X \subset U\}$ уочене бинарне операције " $\cup$ " и " $\cap$ " (унија и пресек) и унарна операција " $'$ " (комплемент). Операције " $\cup$ ", " $\cap$ " и " $'$ " задовољавају аксиоме Булове алгебре (доказано у дефиницији 2.1.). Ако су A, B, C елементи скупа $P(U)$, познато је да важи:

(i) $A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(iv) $A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
(v) $A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$

У овом примеру први елемент је празан скуп $\emptyset$, а последњи елемент је сам скуп U, такође смо проверили да су задовољене аксиоме Булове алгебре, па је дата алгебарска структура на скупу $P(U)$ модел Булове алгебре. Означавамо је: $(P(U), \cup, \cap, ')$.

Модел 2.3.
Матрицу $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ где је $a_{ij} \in \{0, 1\}$ зовемо Булова матрица формата $m \times n$. Нека је M скуп свих Булових матрица формата $m \times n$. Уведимо на скупу M две бинарне операције, у ознаци " $+$ " и " $\times$ " и једну унарну операцију у ознаци " $'$ " на следећи начин:

По дефиницији важи:

$A + B = [a_{ij} \cup b_{ij}]$ $\qquad i = 1, 2, .., m;\ j = 1, 2, .., n$

$A \times B = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$ $\qquad i = 1, 2, .., m;\ j = 1, 2, .., n$

$A' = [\bar{a}_{ij}]$ $\qquad i = 1, 2, .., m;\ j = 1, 2, .., n$

Операције " $\cup$ ", " $\cdot$ " и " $-$ " су из скупа $\{0, 1\}$ из модела 2.1. који је претходно већ доказан, тако да њих не морамо поново да доказујемо.
Да бисмо доказали да ово заиста јесте модел Булове алгебре увешћемо две матрице A и B као примере на основу којих ћемо испитати да ли важе аксиоме Булове алгебре.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 \cup 0 & 0 \cup 1 & 1 \cup 0 \\ 0 \cup 0 & 1 \cup 0 & 1 \cup 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Сада ћемо проверити да ли уведене операције " $+$ ", " $\times$ ", " $'$ " на скупу M задовољавају аксиоме Булове алгебре на скупу {0,1}:

(1) Комутативност:

(i) $A + B = [a_{ij} \cup b_{ij}] = [b_{ij} \cup a_{ij}] = B + A$

(ii) $A \times B = [a_{ij} \cdot b_{ij}] = [b_{ij} \cdot a_{ij}] = B \times A$

(2) Асоцијативност:

(i) $(A + B) + C = [(a_{ij} \cup b_{ij}) \cup c_{ij}] = [a_{ij} \cup (b_{ij} \cup c_{ij})] = A + (B + C)$

(ii) $(A \times B) \times C = [(a_{ij} \cdot b_{ij}) \cdot c_{ij}] = [a_{ij} \cdot (b_{ij} \cdot c_{ij})] = A \times (B \times C)$

(3) Дистрибутивност:

(i) $A + (B \times C) = [a_{ij} \cup (b_{ij} \cdot c_{ij})] = [(a_{ij} \cup b_{ij}) \cdot (a_{ij} \cup c_{ij})] = (A + B) \times (A + C)$

(ii) $A \times (B + C) = [a_{ij} \cdot (b_{ij} \cup c_{ij})] = [(a_{ij} \cdot b_{ij}) \cup (a_{ij} \cdot c_{ij})] = (A \times B) + (A \times C)$

(4) Својство елемената:

(i) Први елемент скупа M је Булова матрица чији су сви елементи нуле. Означићемо је са $0 = [0]$. За наведену матрицу важиће:

$A + 0 = [a_{ij} \cup 0] = [a_{ij}] = A$

(ii) Последњи елемент скупа M је Булова матрица чији су сви елементи јединице. Означићемо је са $I = [1]$. За наведену матрицу важиће:

$A \times I = [a_{ij} \cdot 1] = [a_{ij}] = A$

(5) Својство негације:

(i) $A + A' = [a_{ij} \cup a_{ij}'] = [1] = I$

(ii) $A \times A' = [a_{ij} \cdot a_{ij}'] = [0] = 0$

Доказали смо да уведене операције " $+$ ", " $\times$ ", " $'$ " на скупу M задовољавају аксиоме Булове алгебре па из тога следи да алгебарска структура тј. матрица на скупу M представља модел Булове алгебре и означавамо је: $(M, +, \times, ')$.

Модел 2.4.

Нека је M непразан скуп. Дефинисаћемо функцију f која је дефинисана на скупу M и чији је кодомен из скупа $\{0, 1\}$:

$f : M \to \{0, 1\}$

Овако дефинисана функција је бивалентна (двовредносна функција).

Обележићемо са L_2^M скуп свих оваквих бивалентних функција на скупу M. Уведимо на скупу L_2^M бинарне операције " $\vee$ ", " $\wedge$ " и унарну операцију " $-$ " на следећи начин:

По дефиницији важи:

$(f \vee g)(x) = f(x) \cup g(x)$

$(f \wedge g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$

за свако $x \in M$, где су операције " $\cup$ ", " $\cdot$ " и " $-$ " респективно дисјункција, конјункција и негација на скупу {0,1} из модела 2.1.

Да бисмо проверили да ли је дата алгебарска структура модел проверићемо да ли су задовољене аксиоме Булове алгебре дефинисане на почетку.

(1) Комутативност:

(i) $(f \vee g)(x) = f(x) \cup g(x) = g(x) \cup f(x) = (g \vee f)(x)$

(ii) $(f \wedge g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g \wedge f)(x)$

(2) Асоцијативност:

(i) $((f \vee g) \vee h)(x) = (f(x) \cup g(x)) \cup h(x) = f(x) \cup (g(x) \cup h(x)) = (f \vee (g \vee h))$

(ii) $((f \wedge g) \wedge h)(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = (f \wedge (g \wedge h))$

(3) Дистрибутивност:

(i) $(f \vee (g \wedge h))(x)) = f(x) \cup (g(x) \cdot h(x)) = (f(x) \cup g(x)) \cdot (f(x) \cup h(x) = ((f \vee g) \wedge (f \vee h))(x)$

(ii) $(f \wedge (g \vee h))(x) = f(x) \cdot (g(x) \cup h(x)) = (f(x) \cdot g(x)) \cup (f(x) \cdot h(x)) = ((f \wedge g) \vee (f \wedge h))(x)$

(4) Својство елемената:

(i) Први елемент скупа L_2^M је бивалентна функција $\emptyset$, где је за свако x из M, $\emptyset(x) = 0$.

Према овоме је:

$(f \vee \emptyset)(x) = f(x) \cup \emptyset(x) = f(x) \cup 0 = f(x)$

(ii) Последњи елемент скупа L_2^M је бивалентна функција I, где је за свако x из M, $I(x) = 1$.
Према овоме је:
$(f \wedge I)(x) = f(x) \cdot I(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$

(5) Својство негације:
(i) $(f \vee \bar{f})(x) = f(x) \cup \bar{f}(x) = 1 = I(x)$
(ii) $(f \wedge \bar{f})(x) = f(x) \cdot \bar{f}(x) = 0 = \emptyset(x)$

Доказали смо да важе аксиоме Булове алгебре, према томе, дата алгебарска структура на скупу L_2^M представља модел Булове алгебре. Дату структуру зовемо Булова алгерба бивалентних функција и означавамо је: $(L_2^M, \vee, \wedge, -)$.

3 Теореме и релације у Буловој алгебри

3.1 Теореме

Како бисмо решавали задатке из Булове алгебре и лакше их разумели, наводимо теореме. Неке од теорема још називамо и идентитети.

Идентитети:

(I_1) $a \cup b = b \cup a$	(I_1*) $a \cdot b = b \cdot a$
(I_2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$	(I_2*) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(I_3) $a \cup (b \cdot c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c)$	(I_3*) $a \cdot (b \cup c) = (a \cdot b) \cup (a \cdot c)$
(I_4) $a \cup 0 = a$	(I_4*) $a \cdot I = a$
(I_5) $a \cup \bar{a} = I$	(I_5*) $a \cdot \bar{a} = 0$
(I_6) $a \cup a = a$	(I_6*) $a \cdot a = a$
(I_7) $a \cup I = I$	(I_7*) $a \cdot 0 = 0$
(I_8) $a \cup (a \cdot b) = a$	(I_8*) $a \cdot (a \cup b) = a$
(I_9) $a \cup (\bar{a} \cdot b) = a \cup b$	(I_9*) $a \cdot (\bar{a} \cup b) = a \cdot b$
(I_{10}) $(a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = I$	$(I_{10}*)$ $(a \cdot b) \cdot (\bar{a} \cup \bar{b}) = 0$
(I_{11}) $(a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$	$(I_{11}*)$ $(a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = I$
(I_{12}) $\bar{\bar{a}} = a$	
(I_{13}) $\bar{0} = I$	$(I_{13}*)$ $\bar{I} = 0$
(I_{14}) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$(I_{14}*)$ $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$

Идентитете I_{14} и $I_{14}*$ називамо Де Моргановi закони.

Теорема 3.1 Принцип дуалности у Буловој алгебри.
Дуал сваког идентитета (теореме) I у Буловој алгебри $(B, \cup, \cdot, -)$ је идентитет (теорема) $I*$ који је изведен међусобном заменом операција "$\cup$" и "$\cdot$" као и међусобном заменом елемената 0 и I у идентитету I.

На пример: дуал идентитета (I) $(I \cup a) \cdot (b \cup 0) = b$ је идентитет $(I*)$ $(0 \cdot a) \cup (b \cdot I) = b$.
Идентитетима I_i (где је $1 \leqslant i \leqslant 14 \wedge i \neq 12$) са леве стране дуални су идентитети I_i* са десне стране и обрнуто, то јест $I_i \equiv I_i*$ и $I_i* \equiv I_i$.
Дуал сваке аксиоме Булове алгебре је такође аксиома, као што је и дуал сваке теореме такође теорема. Ако је неки идентитет I последица аксиома $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik}$ Булове алгебре онда је дуал $I*$ последица дуалних аксиома $A_{i1}*$, $A_{i2}*$,...,$A_{ik}*$ јер дуални идентитет $I*$ може бити доказан употребом дуала у сваком кораку доказа.

Идентитете $I_1 - I_5$ не треба доказивати с обзиром да су то заправо аксиоме Булове алгебре дефинисане на почетку.
Потребно је доказати идентитете $I_6 - I_{14}$ и I_6* - $I_{14}*$. За доказивање ових теорема користићемо аксиоме Булове алгебре A_1 - A_5.

(I_6): $a \cup a = a$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_4, A_5*, A_3, A_5, A_4*.
$a = a \cup 0 = a \cup (a \cdot \bar{a}) = (a \cup a) \cdot (a \cup \bar{a}) = (a \cup a) \cdot I = a \cup a.$
(I_6*): $a \cdot a = a$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_4*, A_5, A_3*, A_5*, A_4.
$a = a \cdot I = a \cdot (a \cup \bar{a}) = (a \cdot a) \cup (a \cdot \bar{a}) = (a \cdot a) \cup 0 = a \cdot a.$

Идентитети I_6 и I_6* су дуални ($I_6 \equiv I_6*$ и $I_6* \equiv I_6$). Идентитет I_6 добијен је коришћењем аксиома A_4, A_5*, A_3, A_5, A_4*, док је идентитет I_6* добијен коришћењем аксиома A_4*, A_5, A_3*, A_5*, A_4, које су међусобно дуалне. Дакле, када доказујемо дуалне теореме, можемо доказати једну теорему на основу аксиома Булове алгебре, а за другу аналогно искористити дуалне аксиоме по истом редоследу.

С обзиром да смо идентитет I_6 претходно доказали, можемо га користити у доказивању наредних идентитета како бисмо смањили број корака у доказу. Исто ће важити и за сваки следећи доказан идентитет.

(I_7): $a \cup I = I$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_5, A_2, I_6, A_5.
$a \cup I = a \cup (a \cup \bar{a}) = (a \cup a) \cup \bar{a} = a \cup \bar{a} = I.$
(I_7*): $a \cdot 0 = 0$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_5*, A_2*, I_6*, A_5*.
$a \cdot 0 = a \cdot (a \cdot \bar{a}) = (a \cdot a) \cdot \bar{a} = a \cdot \bar{a} = 0.$

(I_8): $a \cup (a \cdot b) = a$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_4*, A_3*, I_7, A_4*.
$a \cup (a \cdot b) = (a \cdot I) \cup (a \cdot b) = a \cdot (I \cup b) = a \cdot I = a.$
(I_8*): $a \cdot (a \cup b) = a$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_4, A_3, I_7*, A_4.
$a \cdot (a \cup b) = (a \cup I) \cdot (a \cup b) = a \cup (I \cdot b) = a \cup I = a.$

(I_9): $a \cup (\bar{a} \cdot b) = a \cup b$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_3, A_5, A_1*, A_4*.
$a \cup (\bar{a} \cdot b) = (a \cup \bar{a}) \cdot (a \cup b) = I \cdot (a \cup b) = (a \cup b) \cdot I = a \cup b.$
(I_9*): $a \cdot (\bar{a} \cup b) = a \cdot b$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_3*, A_5*, A_1, A_4.
$a \cdot (\bar{a} \cup b) = (a \cdot \bar{a}) \cup (a \cdot b) = 0 \cup (a \cdot b) = (a \cdot b) \cup 0 = a \cdot b.$

(I_{10}): $(a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = I$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_3, A_2, A_1, A_2, A_5, A_5, A_1, I_7, I_6*.
$(a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = ((a \cup b) \cup \bar{a}) \cdot ((a \cup b) \cup \bar{b}) = (a \cup (\bar{a} \cup b)) \cdot (a \cup (b \cup \bar{b})) = ((a \cup \bar{a}) \cup b) \cdot (a \cup I) = (I \cup b) \cdot (a \cup I) = (b \cup I) \cdot (a \cup I) = I \cup I = I.$
(I_{10}*): $(a \cdot b) \cdot (\bar{a} \cup \bar{b}) = 0$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_3*, A_2*, A_1*, A_2*, A_5*, A_5*, A_1*, I_7*, I_6.
$(a \cdot b) \cdot (\bar{a} \cup \bar{b}) = ((a \cdot b) \cdot \bar{a}) \cup ((a \cdot b) \cdot \bar{b}) = (a \cdot (\bar{a} \cdot b)) \cup (a \cdot (b \cdot \bar{b})) = ((a \cdot \bar{a}) \cdot b) \cup (a \cdot 0) = (0 \cdot b) \cup (a \cdot 0) = (b \cdot 0) \cup (a \cdot 0) = 0 \cdot 0 = 0.$

(I_{11}): $(a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_1*, A_3*, A_2*, A_5*, A_1*, I_7*, I_6.
$(a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot (a \cup b) = ((\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot a) \cup ((\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot b) = (a \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})) \cup ((\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot b) = ((a \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b}) \cup (\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot b)) = (0 \cdot \bar{b}) \cup (\bar{a} \cdot 0) = (\bar{b} \cdot 0) \cup (\bar{a} \cdot 0) = 0 \cdot 0 = 0.$
(I_{11}*): $(a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = I$
Доказ. Користимо редом аксиоме и идентитете: A_1, A_3, A_2, A_5, A_1, I_7, I_6*.
$(a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = (\bar{a} \cup \bar{b}) \cup (a \cdot b) = ((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup a) \cdot ((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup b) = (a \cup (\bar{a} \cup \bar{b})) \cdot ((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup b) = ((a \cup \bar{a}) \cup \bar{b}) \cdot (\bar{a} \cup (\bar{b} \cup b)) = (I \cup \bar{b}) \cdot (\bar{a} \cup I) = (\bar{b} \cup I) \cdot (\bar{a} \cup I) = I \cup I = I.$

(I_{12}): $\bar{\bar{a}} = a$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_4*, A_5, A_3*, A_5*, A_1, A_5*, A_1*, A_3*, A_5, A_4*.
$\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}} \cdot I = \bar{\bar{a}} \cdot (a \cup \bar{a}) = (\bar{\bar{a}} \cdot a) \cup (\bar{\bar{a}} \cdot \bar{a}) = (\bar{\bar{a}} \cdot a) \cup 0 = 0 \cup (\bar{\bar{a}} \cdot a) = (a \cdot \bar{a}) \cup (a \cdot \bar{\bar{a}}) = a \cdot (\bar{a} \cup \bar{\bar{a}}) = a \cdot I = a.$

(I_{13}): $\bar{0} = I$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_4, A_1, A_5.
$\bar{0} = \bar{0} \cup 0 = 0 \cup \bar{0} = I.$

$(I_{13}*)$: $\bar{I} = 0$
Доказ. Користимо редом аксиоме: A_4*, A_1*, A_5*.
$\bar{I} = \bar{I} \cup I = I \cup \bar{I} = 0$.

(I_{14}): $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
Доказ. За доказивање овог идентитета користићемо теорему 3.2. која је у наставку доказана.
Теорема 3.2. Ако је $a \cup x = I$ и $a \cdot x = 0$ онда је $x = \bar{a}$.
(1) $(a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = I$ (идентитет I_{10})
(2) $(a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$ (идентитет I_{11})
(3) $a \cup b = A$ (претпоставка)
(4) $\bar{a} \cdot \bar{b} = x$ (претпоставка)
(5) $A \cup x = I$ (замена корака (3) и (4) у корак (1))
(6) $A \cdot x = 0$ (замена корака (3) и (4) у корак (2))
(7) $x = \bar{A}$ (из (5) и (6) по теореми 3.2.)
(8) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (замена корака (3) и (4) у корак (7)) .
$(I_{14}*)$: $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$
Доказ. За доказивање овог идентитета такође користимо теорему 3.2. која је у наставку доказана.
(1) $(a \cdot b) \cdot (\bar{a} \cup \bar{b}) = 0$ (идентитет $I_{10}*$)
(2) $(a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = I$ (идентитет $I_{11}*$)
(3) $a \cdot b = A$ (претпоставка)
(4) $\bar{a} \cup \bar{b} = x$ (претпоставка)
(5) $A \cdot x = 0$ (замена корака (3) и (4) у корак (1))
(6) $A \cup x = I$ (замена корака (3) и (4) у корак (2))
(7) $x = \bar{A}$ (из (5) и (6) по теореми 3.2.)
(8) $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$ (замена корака (3) и (4) у корак (7)) .

Сада ћемо формулисати и доказати остале теореме у Буловој алгебри.

Теорема 3.2.
Ако је $a \cup x = I$ и $a \cdot x = 0$ онда је $x = \bar{a}$.
Доказ.
Претпоставимо супротно, да $x \neq \bar{a}$. Посматрајмо прву једначину. На основу 14 наведених идентитета имамо два решења за x, а то су решења из једначина: $a \cup I = I$ и $a \cup \bar{a} = I$. Једно решење је $x = I$, а друго $x = \bar{a}$. С обзиром да смо претпоставили да $x \neq \bar{a}$, узимамо прво решење $x = I$ и проверавамо да ли се уклапа у другу једначину. Како $a \cdot I \neq 0$ наилазимо на контрадикцију. Стога смо погрешно претпоставили и следи да је x заиста $\bar{a}$, што се уклапа у другу једначину. Дакле, заиста јесте $a \cdot \bar{a} = 0$ и теорема је доказана.
Аналогно, ову теорему можемо доказати и уколико пођемо од прве једначине $a \cdot x = 0$. Претпоставимо суротно, да $x \neq \bar{a}$. На основу 14 наведених идентитета имамо два решења за x, а то су решења из једначина: $a \cdot 0 = 0$ и $a \cdot \bar{a} = 0$. Једно решење је $x = 0$, а друго $x = \bar{a}$. С обзиром да смо претпоставили да $x \neq \bar{a}$, узимамо прво решење $x = 0$ и проверавамо да ли се уклапа у прву једначину. Како $a \cup 0 \neq a$ наилазимо на контрадикцију. Стога смо погрешно претпоставили и следи да је x заиста $\bar{a}$, што се уклапа у прву једначину. Дакле, заиста јесте $a \cup x = I$ и теорема је доказана.

Ову теорему можемо доказати и директном применом аксиома и идентитета Булове алгебре уз дате услове: $a \cup x = I$ и $a \cdot x = 0$. Користићемо редом аксиоме и идентитете: I_4*, I_5, A_3*, A_1*, A_1, I_5*, A_1*, A_3*, A_4*.
$x = x \cdot I = x \cdot (a \cup \bar{a}) = (x \cdot a) \cup (x \cdot \bar{a}) = (a \cdot x) \cup (\bar{a} \cdot x) = 0 \cup (\bar{a} \cdot x) = (\bar{a} \cdot x) \cup 0 = (\bar{a} \cdot x) \cup (a \cdot \bar{a}) = (\bar{a} \cdot x) \cup (\bar{a} \cdot a) = \bar{a} \cdot (x \cup a) = \bar{a} \cdot I = \bar{a}$.

Теорема 3.3.
$a \cup b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$
Доказ.
($\Rightarrow$): $a \cup b = 0 \Rightarrow a = b = 0$
Овај смер еквиваленције доказаћемо директном применом аксиома Булове алгебре и неких од 14 већ доказаних идентитета. Користићемо редом аксиоме и идентитете:
За a: A_4, A_1, A_3, I_6, I_7*.
За b: A_4, A_1, A_3, A_1, I_6, I_7*.
$a = (a \cdot b) \cup a = a \cup (a \cdot b) = (a \cup a) \cdot (a \cup b) = a \cdot 0 = 0,$
$b = (b \cdot a) \cup b = b \cup (b \cdot a) = (b \cup b) \cdot (b \cup a) = (b \cup b) \cdot (a \cup b) = b \cdot 0 = 0.$

($\Leftarrow$): $a \cup b = 0 \Leftarrow a = b = 0$
Претпоставимо супротно да $a \cup b \neq 0$. Из претпоставке следи да је бар један од чланова a и b различит од нуле што је контрадикција, јер нам је дато да је $a = b = 0$. Дакле доказали смо теорему.

Теорема 3.4.
$a \cdot b = I \Leftrightarrow a = b = I.$
Доказ.
($\Rightarrow$): $a \cdot b = I \Rightarrow a = b = I$
Овај смер еквиваленције доказаћемо директном применом аксиома Булове алгебре и неких од 14 већ доказаних идентитета. Користићемо редом аксиоме и идентитете:
За a: A_4*, A_1*, A_3*, I_6*, I_7.
За b: A_4*, A_1*, A_3*, A_1*, I_6*, I_7.
$a = (a \cup b) \cdot a = a \cdot (a \cup b) = (a \cdot a) \cup (a \cdot b) = a \cup I = I,$
$b = (b \cup a) \cdot b = b \cdot (b \cup a) = (b \cdot b) \cup (b \cdot a) = (b \cdot b) \cup (a \cdot b) = b \cup I = I.$

($\Leftarrow$): $a \cdot b = I \Leftarrow a = b = I$
Претпоставимо супротно да $a \cdot b \neq I$. Из претпоставке следи да је бар један од чланова a и b различит од I што је контрадикција, јер нам је дато да је $a = b = I$. Дакле, доказали смо теорему.

Теорема 3.5.
$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$
Доказ.
($\Rightarrow$): $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
Претпоставимо супротно да ни a ни b нису нула, то јест $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тада ни $a \cdot b$ не би могло да буде нула (јер су и a и b различити од нуле), што је контрадикција. Дакле, бар један од елемената a или b је нула.

($\Leftarrow$): $a \cdot b = 0 \Leftarrow a = 0 \vee b = 0$
Претпоставимо супротно да $a \cdot b \neq 0$. Према идентитету I_7 важи: $a \cdot 0 = 0$, конјункција два елемента од којих је један једнак нули, а други различит од нуле увек је нула, те наилазимо на контрадикцију. Дакле, заиста важи: $a \cdot b = 0$.

Теорема 3.6.
У Буловој алгебри постоји само један први елемент.

Теорема 3.7.
У Буловој алгебри постоји само један последњи елемент.

Теорема 3.8.
У Буловој алгебри за сваки елемент a постоји само један елемент $\bar{a}$.

Теореме 3.6., 3.7. и 3.8. нећемо доказивати, с обзиром да се своде на директну последицу већ доказаних идентитета и теорема.

3.2 Релације

Уведимо у Булову алгебру $(B, \cup, \cdot, -)$ бинарну релацију $\leqslant$ (мање или једнако) на следећи начин:

Дефиниција 3.1. За елементе x, y из B кажемо да је $x \leqslant y$ ако и само ако $x \cup y = y$.
Сада ћемо увести и доказати две теореме које се односе на ову релацију у Буловој алгебри.

Теорема 3.9.
$x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y = x$
Доказ.
$(\Rightarrow)$: $x \leqslant y \Rightarrow x \cdot y = x$
(1) $x \leqslant y$ (претпоставка од које полазимо како бисмо доказали импликацију)
(2) $x \cup y = y$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(3) $x \cdot y = x \cdot y$ (идентитет који важи: $a = a$)
(4) $x \cdot (x \cup y) = x \cdot y$ (у други корак убацујемо x са леве стране то јест замењујемо (2) у (3))
(5) $x = x \cdot y$ (примењујемо идентитет I_8* на корак (4))

$(\Leftarrow)$: $x \leqslant y \Leftarrow x \cdot y = x$
(1) $x = x \cdot y$ (претпоставка од које полазимо како бисмо доказали импликацију)
(2) $x \cup y = x \cup y$ (идентитет који важи: $a = a$)
(3) $x \cup y = (x \cdot y) \cup y$ (замена (1) у (2))
(4) $x \cup y = y \cup (y \cdot x)$ (комутација идентитета I_1 и I_1*)
(5) $x \cup y = y$ (примењујемо идентитет I_8 на корак (4))
(6) $x \leqslant y$ (директно следи из дефиниције 3.1.)

Доказали смо оба смера еквиваленција ове теореме, дакле теорема је доказана. Заиста важи: $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y = x$.

Теорема 3.10.
Релација $\leqslant$ је релација поретка у Буловој алгебри $(B, \cup, \cdot, -)$, то јест за сваки x, y, z из B задовољава услове:
(i) $x \leqslant x$
(ii) ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ онда је $y = x$
(iii) ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ онда је $x \leqslant z$

Доказ.
(i) $x \leqslant x$
(1_i) $x \cup x = x$ (идентитет I_6)
(2_i) $x \leqslant x$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(ii) ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ онда је $y = x$
(1_{ii}) $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ (претпоставка од које полазимо како бисмо доказали импликацију)
(2_{ii}) $x \cup y = y$ и $y \cup x = x$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(3_{ii}) $x \cup y = y$ и $x \cup y = x$ (примењујемо идентитет I_1 на корак (2_{ii}))
(4_{ii}) $y = x$ (директно следи из транзитивности)
(iii) ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ онда је $x \leqslant z$
(1_{iii}) $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ (претпоставка од које полазимо како бисмо доказали импликацију)
(2_{iii}) $x \cup y = y$ и $y \cup z = z$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(3_{iii}) $(x \cup y) \cup z = z$ (замена из корака (2_{iii}))
(4_{iii}) $x \cup (y \cup z) = z$ (асоцијација идентитета I_2)

(5_{iii}) $x \cup z = z$ (из претпоставке)
(6_{iii}) $x \leqslant z$ (директно следи из дефиниције 3.1.)

Доказали смо све три особине, дакле релација $\leqslant$ је релација поретка у Буловој алгебри.

Уведимо у Булову алгебру $(B, \cup, \cdot, -)$ бинарну релацију $\geqslant$ (веће или једнако) на следећи начин:

Дефиниција 3.2. За елементе x, y из B кажемо да је $x \geqslant y$ ако и само ако $x \cdot y = y$.

Након увођења дефиниције 3.2. можемо закључити да су дефиниције 3.1. и 3.2. међусобно дуалне. Уопште, нека је T теорема (дефинција или идентитет) Булове алгебре $(B, \cup, \cdot, -)$ у којој се појављују и симболи $\leqslant$ и $\geqslant$. Дуална теорема T^* изводи се тако што се поред међусобне замене симбола "$\cup$" и "$\cdot$", 0 и I врши међусобна замена и симбола $\leqslant$ и $\geqslant$. Одавде следи да је $(T^*)^* \equiv T$.

У Буловој алгебри $(B, \cup, \cdot, -)$ за сваки x, y, z из B важе следећа својства, теореме:

(T_1) $x \leqslant x \cup y$ и $y \leqslant x \cup y$
(T_2) $x \leqslant z$ и $y \leqslant z \Leftrightarrow x \cup y \leqslant z$
(T_3) ако је $x \leqslant y$ онда је $x \cup z \leqslant y \cup z$
(T_4) $0 \leqslant x$
(T_5) $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot \bar{y} = 0$
(T_6) $x = y \Leftrightarrow (\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I$

$(T_1{}^*)$ $x \geqslant x \cdot y$ и $y \geqslant x \cdot y$
$(T_2{}^*)$ $x \geqslant z$ и $y \geqslant z \Leftrightarrow x \cdot y \geqslant z$
$(T_3{}^*)$ ако је $x \geqslant y$ онда је $x \cdot z \geqslant y \cdot z$
$(T_4{}^*)$ $I \geqslant x$
$(T_5{}^*)$ $x \geqslant y \Leftrightarrow x \cup \bar{y} = I$
$(T_6{}^*)$ $x = y \Leftrightarrow (\bar{x} \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y}) = 0$

Пре самог доказа ових теорема можемо закључити да су теореме T_1 - T_6 и $T_1{}^*$ - $T_6{}^*$ међусобно дуалне.

Доказ.

(T_1) $x \leqslant x \cup y$ и $y \leqslant x \cup y$

У овој теореми потребно је доказати да по дефиницији важи: $x \cup (x \cup y) = x \cup y$. Кренућемо од леве стране једнакости и пробаћемо да коришћењем аксиома и индентитета Булове алгебре дођемо до десне стране једнакости и тако докажемо да су једнаке и да теорема заиста важи.
(1) $x \cup (x \cup y)$ (лева страна једнакости)
(2) $(y \cup x) \cup x$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (1))
(3) $y \cup (x \cup x)$ (примењујемо аксиому A_2 на корак (2))
(4) $y \cup x$ (примењујемо идентитет I_6 на корак (3))
(5) $x \cup y$. (примењујемо аксиому A_1 на корак (4))
У кораку (5) дошли смо до десне стране једнакости. За y важи аналогно, дакле, теорема T_1 је доказана.

$(T_1{}^*)$ $x \geqslant x \cdot y$ и $y \geqslant x \cdot y$

У овој теореми потребно је доказати да по дефиницији важи: $x \cdot (x \cdot y) = x \cdot y$. Кренућемо од леве стране једнакости и пробаћемо да коришћењем аксиома и индентитета Булове алгебре дођемо до десне стране једнакости и тако докажемо да су једнаке и да теорема заиста важи.
(1) $x \cdot (x \cdot y)$ (лева страна једнакости)
(2) $(y \cdot x) \cdot x$ (примењујемо аксиому $A_1{}^*$ на корак (1))
(3) $y \cdot (x \cdot x)$ (примењујемо аксиому $A_2{}^*$ на корак (2))
(4) $y \cdot x$ (примењујемо идентитет $I_6{}^*$ на корак (3))
(5) $x \cdot y$. (примењујемо аксиому $A_1{}^*$ на корак (4))
У кораку (5) дошли смо до десне стране једнакости. За y важи аналогно, дакле, теорема $T_1{}^*$ је доказана.

(T_2) $x \leqslant z$ и $y \leqslant z \Leftrightarrow x \cup y \leqslant z$

$(\Rightarrow)$: $x \leqslant z$ и $y \leqslant z \Rightarrow x \cup y \leqslant z$
(1) $x \cup z = z$ (по дефиницији 3.1. из услова)

(2) $y \cup z = z$ (по дефиницији 3.1. из услова)
(3) $x \cup (y \cup z) = z$ (убацујемо израз (2) у израз (1))
(4) $(x \cup y) \cup z = z$ (примењујемо аксиому A_2 на корак (3))
(5) $x \cup y \leqslant z$. (директно следи из дефиниције 3.1.)
($\Leftarrow$): $x \leqslant z$ и $y \leqslant z \Leftarrow x \cup y \leqslant z$
Почетни израз: $x \cup y \leqslant z$ трансформисаћемо по дефиницији 3.1. у израз: $(x \cup y) \cup z = z$. При доказивању ове импликације, поделићемо елементе x и y на два случаја:
(1) Први случај када је: $x \leqslant y$
(1.1) $x \cup y = y$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(1.2) $y \cup z = z$ (убацујемо корак (1.1) у почетни израз)
(1.3) $y \leqslant z$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(1.4) $x \cup (y \cup z) = z$ (примењујемо аксиому A_2 на почетни израз)
(1.5) $x \cup z = z$ (убацујемо корак (1.2) у корак (1.4))
(1.6) $x \leqslant z$. (директно следи из дефиниције 3.1.)
(2) Други случај када је: $y \leqslant x$
(2.1) $y \cup x = x$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(2.2) $x \cup y = x$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (2.1))
(2.3) $x \cup z = z$ (убацујемо корак (2.2) у почетни израз)
(2.4) $x \leqslant z$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(2.5) $(y \cup x) \cup z = z$ (примењујемо аксиому A_1 на почетни израз)
(2.6) $y \cup (x \cup z) = z$ (примењујемо аксиому A_2 на корак (2.5))
(2.7) $y \cup z = z$ (убацујемо корак (2.3) у корак (2.6))
(2.8) $y \leqslant z$. (директно следи из дефиниције 3.1.)
Доказивањем обе стране еквиваленције доказали смо теорему T_2.

(T_2*) $x \geqslant z$ и $y \geqslant z \Leftrightarrow x \cdot y \geqslant z$
($\Rightarrow$): $x \geqslant z$ и $y \geqslant z \Rightarrow x \cdot y \geqslant z$
(1) $x \cdot z = z$ (по дефиницији 3.2. из услова)
(2) $y \cdot z = z$ (по дефиницији 3.2. из услова)
(3) $x \cdot (y \cdot z) = z$ (убацујемо корак (2) у корак (1))
(4) $(x \cdot y) \cdot z = z$ (примењујемо аксиому A_2* на корак (3))
(5) $x \cdot y \geqslant z$. (директно следи из дефиниције 3.2.)
($\Leftarrow$): $x \geqslant z$ и $y \geqslant z \Leftarrow x \cdot y \geqslant z$.
Почетни израз, следи директно из дефиниције: $(x \cdot y) \cdot z = z$. При доказивању ове импликације, поделићемо елементе x и y на два случаја:
(1) Први случај када је: $x \geqslant y$
(1.1) $x \cdot y = y$ (директно следи из дефиниције 3.2.)
(1.2) $y \cdot z = z$ (убацујемо корак (1.1) у почетни израз)
(1.3) $y \geqslant z$ (директно следи из дефиниције 3.2.)
(1.4) $x \cdot (y \cdot z) = z$ (примењујемо аксиому A_2* на почетни израз)
(1.5) $x \cdot z = z$ (убацујемо корак (1.2) у корак (1.4))
(1.6) $x \geqslant z$. (директно следи из дефиниције 3.2.)
(2) Други случај када је: $y \geqslant x$
(2.1) $y \cdot x = x$ (директно следи из дефиниције 3.2.)
(2.2) $x \cdot y = x$ (примењујемо аксиому A_1* на корак (2.1))
(2.3) $x \cdot z = z$ (убацујемо корак (2.2) у почетни израз)
(2.4) $x \geqslant z$ (директно следи из дефиниције 3.2.)
(2.5) $(y \cdot x) \cdot z = z$ (примењујемо аксиому A_1* на почетни израз)
(2.6) $y \cdot (x \cdot z) = z$ (примењујемо аксиому A_2* на корак (2.5))
(2.7) $y \cdot z = z$ (убацујемо корак (2.3) у корак (2.6))
(2.8) $y \geqslant z$. (директно следи из дефиниције 3.2.)
Доказивањем обе стране еквиваленције доказали смо теорему T_2*.

(T_3) ако је $x \leqslant y$ онда је $x \cup z \leqslant y \cup z$
(1) $x \cup y = y$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(2) $(x \cup y) \cup z = y \cup z$ (додајемо операцију "$\cup$" и z са десне стране једнакости)
(3) $(x \cup z) \cup (y \cup z) = y \cup z$ (примењујемо идентитет I_6 на корак (2))
(4) $x \cup z \leqslant y \cup z$. (директно следи из дефиниције 3.1.)
Овим смо доказали теорему T_3.

(T_3*) ако је $x \geqslant y$ онда је $x \cdot z \geqslant y \cdot z$
(1) $x \cdot y = y$ (директно следи из дефиниције 3.2.)
(2) $(x \cdot y) \cdot z = y \cdot z$ (додајемо операцију "$\cdot$" и z са десне стране једнакости)
(3) $(x \cdot z) \cdot (y \cdot z) = y \cdot z$ (примењујемо идентитет I_6* на корак (2))
(4) $x \cdot z \geqslant y \cdot z$. (директно следи из дефиниције 3.2.)
Овим смо доказали теорему T_3*.

(T_4) $0 \leqslant x$
(1) $x \cup 0 = x$ (идентитет I_4)
(2) $0 \cup x = x$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (1))
(3) $0 \leqslant x$. (директно следи из дефиниције 3.1.)
Овим смо доказали теорему T_4.

(T_4*) $I \geqslant x$
(1) $x \cdot I = x$ (идентитет I_4*)
(2) $I \cdot x = x$ (примењујемо аксиому A_1* на корак (1))
(3) $I \geqslant x$. (директно следи из дефиниције 3.2.)
Овим смо доказали теорему T_4*.

Преостало нам је још да докажемо теореме T_5, T_5* и T_6, T_6*. Већ смо напоменули да су теореме T_1 - T_6 и T_1* - T_6* међусобно дуалне, а доказивањем теорема $T_1 - T_4$ и T_1* $-$ T_4* њихову дуалност смо и потврдили, тако да ћемо за преостале две доказати само једну теорему, док ће дуална теорема следити аналогно.

(T_5) $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot \bar{y} = 0$
($\Rightarrow$): $x \leqslant y \Rightarrow x \cdot \bar{y} = 0$
(1) $x \cdot y = x$ (теорема 3.9.)
(2) $(x \cdot y) \cdot \bar{y} = x \cdot \bar{y}$ (додајемо операцију "$\cdot$" и $\bar{y}$ са десне стране једнакости)
(3) $x \cdot (y \cdot \bar{y}) = x \cdot \bar{y}$ (примењујемо аксиому A_2* на корак (2))
(4) $x \cdot 0 = x \cdot \bar{y}$ (примењујемо идентитет I_5* на корак (3))
(5) $0 = x \cdot \bar{y}$. (примењујемо идентитет I_7* на корак (4))
($\Leftarrow$): $x \leqslant y \Leftarrow x \cdot \bar{y} = 0$
(1) $x \cdot \bar{y} = 0$ (услов)
(2) $(x \cdot \bar{y}) \cup y = 0 \cup y$ (додајемо операцију "$\cup$" и y са десне стране једнакости)
(3) $y \cup (x \cdot \bar{y}) = y \cup 0$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (2))
(4) $(y \cup x) \cdot (y \cup \bar{y}) = y$ (примењујемо аксиому A_3 и идентитет I_4 на корак (3))
(5) $(y \cup x) \cdot I = y$ (примењујемо идентитет I_5 на корак (4))
(6) $y \cup x = y$ (примењујемо идентитет I_4* на корак (5))
(7) $x \cup y = y$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (6))
(8) $x \leqslant y$. (директно следи из дефиниције 3.1.)

(T_6) $x = y \Leftrightarrow (\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I$
($\Rightarrow$): $x = y \Rightarrow (\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I$
(1) $x = y$ (услов)
(2) $x \cup \bar{x} = I$ (идентитет I_5)
(3) $y \cup \bar{x} = I$ (убацујемо корак (1) у корак (2))

(4) $\bar{x} \cup y = I$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (3))
(5) $\bar{x} = \bar{y}$ (негирамо корак (1))
(6) $x \cup \bar{y} = I$ (убацујемо корак (5) у корак (2))
(7) $(\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I \cdot I$ (примењујемо операцију " $\cdot$ " на кораке (4) и (6))
(8) $(\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I$. (примењујемо идентитет I_6* на корак (7))
($\Leftarrow$): $x = y \Leftarrow (\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I$
(1) $(\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = I$ (услов)
(2) $((\bar{x} \cup y) \cdot x) \cup ((\bar{x} \cup y) \cdot \bar{y}) = I$ (примењујемо аксиому A_3* на корак (1))
(3) $(x \cdot (\bar{x} \cup y)) \cup (\bar{y} \cdot (\bar{x} \cup y)) = I$ (примењујемо аксиому A_1* на корак (2))
(4) $((x \cdot \bar{x}) \cup (x \cdot y)) \cup ((\bar{y} \cdot \bar{x}) \cup (\bar{y} \cdot y)) = I$ (примењујемо аксиому A_3* на корак (3))
(5) $((x \cdot \bar{x}) \cup (x \cdot y)) \cup ((\bar{y} \cdot \bar{x}) \cup (y \cdot \bar{y})) = I$ (примењујемо аксиому A_1* на корак (4))
(6) $(0 \cup (x \cdot y)) \cup ((\bar{y} \cdot \bar{x}) \cup 0) = I$ (примењујемо идентитет I_5* на корак (5))
(7) $((x \cdot y) \cup 0) \cup ((\bar{x} \cdot \bar{y}) \cup 0) = I$ (примењујемо аксиоме A_1 и A_1* на корак (6))
(8) $(x \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y}) = I$ (примењујемо идентитет I_4 на корак (7))
Добијени израз $(x \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y}) = I$ даље раздвајамо на два дела како бисмо доказали да је $x = y$.
У првом делу изразу додајемо x и операцију " $\cdot$ " са леве стране једнакости.
(9.1) $x \cdot ((x \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y})) = x \cdot I$ (додајемо x и операцију " $\cdot$ " са леве стране једнакости)
(10.1) $(x \cdot x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}) = x$ (примењујемо аксиому A_3* и идентитет I_4* на корак (9.1))
(11.1) $(x \cdot y) \cup (\bar{y} \cdot 0) = x$ (примењујемо идентитете I_6* и I_5* и аксиому A_1* на корак (10.1))
(12.1) $(x \cdot y) \cup 0 = x$ (примењујемо идентитет I_7* на корак (11.1))
(13.1) $x \cdot y = x$ (примењујемо идентитет I_4 на корак (12.1))
(14.1) $x \leqslant y$. (директно следи из теореме 3.9.)
У другом делу изразу додајемо y и операцију " $\cdot$ " са леве стране једнакости.
(9.2) $y \cdot ((x \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y})) = y \cdot I$ (додајемо y и операцију " $\cdot$ " са леве стране једнакости)
(10.2) $(y \cdot x \cdot y) \cup (y \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}) = y$ (примењујемо аксиому A_3* и идентитет I_4* на корак (9.2))
(11.2) $(y \cdot y \cdot x) \cup (y \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}) = y$ (примењујемо аксиому A_1* на корак (10.2))
(12.2) $(y \cdot x) \cup (\bar{x} \cdot 0) = y$ (примењујемо идентитете I_6* и I_5* и аксиому A_1* на корак (11.2))
(13.2) $(y \cdot x) \cup 0 = y$ (примењујемо идентитет I_7* на корак (12.2))
(14.2) $y \cdot x = y$ (примењујемо идентитет I_4 на корак (13.2))
(15.2) $y \leqslant x$. (директно следи из теореме 3.9.)

Овим смо доказали све теореме које важе и које се могу користити у релацијама Булове алгебре.

3.3 Примери

Пример 3.1.
Користећи аксиоме и идентитете Булове алгебре доказати да у Буловој алгебри важе следећи идентитети:

1. $(x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y}) = x$ 1.* $(x \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = x$

Доказ.
Како бисмо доказали тврђење 1. користићемо редом аксиоме и идентитете: A_3, A_4, A_1, A_3, A_1, I_5, I_4*, A_1*, A_1.
$(x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y}) = ((x \cdot y) \cup x) \cdot ((x \cdot y) \cup \bar{y}) = x \cdot ((x \cdot y) \cup \bar{y}) = x \cdot (\bar{y} \cup (x \cdot y)) = x \cdot ((\bar{y} \cup x) \cdot (\bar{y} \cup y) = x \cdot ((\bar{y} \cup x) \cdot (y \cup \bar{y})) = x \cdot ((\bar{y} \cup x) \cdot I) = x \cdot (\bar{y} \cup x) = (\bar{y} \cup x) \cdot x = (x \cup \bar{y}) \cdot x = x$.
Како бисмо доказали тврђење 1.* користићемо редом дуалне аксиоме и идентитете оних аксиома и идентитета које смо користили у доказивању тврђења 1., редом: A_3*, A_4*, A_1*, A_3*, A_1*, I_5*, I_4, A_1, A_1*, A_4.
$(x \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = ((x \cup y) \cdot x) \cup ((x \cup y) \cdot \bar{y}) = x \cup ((x \cup y) \cdot \bar{y}) = x \cup (\bar{y} \cdot (x \cup y)) = x \cup ((\bar{y} \cdot x) \cup (\bar{y} \cdot y) = x \cup ((\bar{y} \cdot x) \cup (y \cdot \bar{y})) = x \cup ((\bar{y} \cdot x) \cup 0) = x \cup (\bar{y} \cdot x) = (\bar{y} \cdot x) \cup x = (x \cdot \bar{y}) \cup x = x$.

Пример 3.2.
Користећи аксиоме и идентитете Булове алгебре доказати да у Буловој алгебри важе следећи идентитети:

2. $(x \cdot y) \cdot (y \cup \bar{z}) = (x \cdot y) \cdot z$ 2.* $(x \cup y) \cup (y \cdot \bar{z}) = (x \cup y) \cup z$

Доказ.
Како бисмо доказали тврђење 2. користићемо редом аксиоме и идентитете: A_3*, A_2*, I_5*, I_7*, I_4, A_2*, A_1*, A_2*.
$(x \cdot y) \cdot (y \cup \bar{z}) = ((x \cdot z) \cdot y) \cup ((x \cdot z) \cdot \bar{z}) = ((x \cdot z) \cdot y) \cup (x \cdot (z \cdot \bar{z})) = ((x \cdot z) \cdot y) \cup (x \cdot 0) = ((x \cdot z) \cdot y) \cup 0 = (x \cdot z) \cdot y = x \cdot (z \cdot y) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
Како бисмо доказали тврђење 2.* користићемо редом дуалне аксиоме и идентитете оних аксиома и идентитета које смо користили у доказивању тврђења 2., редом: A_3, A_2, I_5, I_7, I_4*, A_2, A_1 и A_2.
$(x \cup y) \cup (y \cdot \bar{z}) = ((x \cup z) \cup y) \cdot ((x \cup z) \cup \bar{z}) = ((x \cup z) \cup y) \cdot (x \cup (z \cup \bar{z})) = ((x \cup z) \cup y) \cdot (x \cup I) = ((x \cup z) \cup y) \cdot I = (x \cup z) \cup y = x \cup (z \cup y) = x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.

Пример 3.3.
Користећи аксиоме и идентитете Булове алгебре доказати да у Буловој алгебри важе следећи идентитети:

3. $(x \cdot y) \cup (x \cdot z) \cup (\bar{x} \cdot y) = (x \cdot z) \cup y$ 3.* $(x \cup y) \cdot (x \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y) = (x \cup z) \cdot y$

Доказ.
Како бисмо доказали тврђење 3. користићемо редом аксиоме и идентитете: A_1, A_3, A_1, A_1*, A_3, A_4, I_5, A_1*, I_4*, A_1, A_4*, A_1.
$(x \cdot y) \cup (x \cdot z) \cup (\bar{x} \cdot y) = (x \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot y) \cup (x \cdot z) = (((x \cdot y) \cup \bar{x}) \cdot ((x \cdot y) \cup y))) \cup (x \cdot z) = (((\bar{x} \cup (x \cdot y)) \cdot ((y \cdot x) \cup y))) \cup (x \cdot z) = (((\bar{x} \cup x) \cdot (\bar{x} \cup y)) \cdot y) \cup (x \cdot z) = ((I \cdot (\bar{x} \cup y)) \cdot y) \cup (x \cdot z) = (((\bar{x} \cup y) \cdot I) \cdot y) \cup (x \cdot z) = ((\bar{x} \cup y) \cdot y) \cup (x \cdot z) = ((y \cup \bar{x}) \cdot y) \cup (x \cdot z) = y \cup (x \cdot z) = (x \cdot z) \cup y$.
Како бисмо доказали тврђење 3.* користићемо редом дуалне аксиоме и идентитете оних аксиома и идентитета које смо користили у доказивању тврђења 3., редом: A_1*, A_3*, A_1*, A_1, A_3*, A_4*, I_5*, A_1, I_4, A_1*, A_4, A_1*.
$(x \cup y) \cdot (x \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y) = (x \cup y) \cdot (\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup z) = (((x \cup y) \cdot \bar{x}) \cup ((x \cup y) \cdot y))) \cdot (x \cup z) = ((\bar{x} \cdot (x \cup y)) \cup ((y \cup x) \cdot y)) \cdot (x \cup z) = (((\bar{x} \cdot x) \cup (\bar{x} \cdot y)) \cup y) \cdot (x \cup z) = ((0 \cup (\bar{x} \cdot y)) \cup y) \cdot (x \cup z) = (((\bar{x} \cdot y) \cup 0) \cup y) \cdot (x \cup z) = ((\bar{x} \cdot y) \cup y) \cdot (x \cup z) = ((y \cdot \bar{x}) \cup y) \cdot (x \cup z) = y \cdot (x \cup z) = (x \cup z) \cdot y$.

Пример 3.4.
Користећи дефиниције, аксиоме и теореме Булове алгебре $(B, \cup, \cdot, -)$ доказати следећи идентитет:

4. $a \leqslant b \Leftrightarrow \bar{b} \leqslant \bar{a}$

Доказ.
$(\Rightarrow)$: $a \leqslant b \Rightarrow \bar{b} \leqslant \bar{a}$
(1) $a \leqslant b$ (почетни услов)
(2) $a \cup b = b$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(3) $a \cup (a \cdot b) = a$ (идентитет I_8)
(4) $(a \cup a) \cdot (a \cup b) = a$ (примењујемо аксиому A_3 на корак (3))
(5) $a \cdot (a \cup b) = a$ (примењујемо идентитет I_6 на корак (4))
(6) $a \cdot b = a$ (убацујемо корак (2) у корак (5))
(7) $\overline{a \cdot b} = \bar{a}$ (негирамо корак (6))
(8) $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$ (идентитет I_{14}*)
(9) $\bar{a} \cup \bar{b} = \bar{a}$ (убацујемо корак (8) у корак (7))
(10) $\bar{b} \cup \bar{a} = \bar{a}$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (9))
(11) $\bar{b} \leqslant \bar{a}$. (директно следи из дефиниције 3.1.)

($\Leftarrow$): $a \leqslant b \Leftarrow \bar{b} \leqslant \bar{a}$
(1) $\bar{b} \leqslant \bar{a}$ (почетни услов)
(2) $\bar{b} \cup \bar{a} = \bar{a}$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(3) $b \cup (b \cdot a) = b$ (идентитет I_8)
(4) $\overline{\bar{b} \cup \bar{a}} = \bar{\bar{a}}$ (негирамо корак (2))
(5) $\overline{\bar{b} \cup \bar{a}} = a$ (примењујемо идентитет I_{12} на корак (4))
(6) $\bar{b} \cup \bar{a} = \overline{b \cdot a}$ (идентитет I_{14}*)
(7) $\overline{\overline{b \cdot a}} = a$ (убацујемо корак (6) у корак (5))
(8) $b \cdot a = a$ (примењујемо идентитет I_{12} на корак (7))
(9) $b \cup a = b$ (убацујемо корак (8) у корак (3))
(10) $a \cup b = b$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (9))
(11) $a \leqslant b$. (директно следи из дефиниције 3.1.)

Доказали смо оба смера еквиваленције, дакле идентитет важи за свако $a, b \in B$.

Пример 3.5.
Користећи дефиниције, аксиоме и теореме Булове алгебре $(B, \cup, \cdot, -)$ доказати следећи идентитет:
5. $a \cdot b \leqslant c \Leftrightarrow a \leqslant \bar{b} \cup c$

Доказ.
($\Rightarrow$): $a \cdot b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant \bar{b} \cup c$
(1) $a \cdot b \leqslant c$ (почетни услов)
(2) $(a \cdot b) \cup c = c$ (директно следи из дефиниције 3.1.)
(3) $\bar{b} \cup ((a \cdot b) \cup c) = \bar{b} \cup c$ (додајемо операцију "$\cup$" и $\bar{b}$ са леве стране једнакости)
(4) $(\bar{b} \cup (a \cdot b)) \cup c = \bar{b} \cup c$ (примењујемо аксиому A_2 на корак (3))
(5) $((\bar{b} \cup a) \cdot (b \cup \bar{b})) \cup c = \bar{b} \cup c$ (примењујемо аксиоме A_3 и A_1 на корак (4))
(6) $((\bar{b} \cup a) \cdot I) \cup c = \bar{b} \cup c$ (примењујемо идентитет I_5 на корак (5))
(7) $(\bar{b} \cup a) \cup c = \bar{b} \cup c$ (примењујемо идентитет I_4* на корак (6))
(8) $(a \cup \bar{b}) \cup c = \bar{b} \cup c$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (7))
(9) $a \cup (\bar{b} \cup c) = \bar{b} \cup c$ (примењујемо аксиому A_2 на корак (9))
(10) $a \leqslant \bar{b} \cup c$. (директно следи из дефиниције 3.1.)
($\Leftarrow$): $a \cdot b \leqslant c \Leftarrow a \leqslant \bar{b} \cup c$
(1) $a \cup (\bar{b} \cup c) = \bar{b} \cup c$ (услов, директно следи из дефинције 3.1.)
(2) $\bar{a} \cup (a \cup (\bar{b} \cup c)) = \bar{a} \cup (\bar{b} \cup c)$ (додајемо $\bar{a}$ и операцију "$\cup$" са леве стране једнакости)
(3) $(\bar{a} \cup a) \cup (\bar{b} \cup c) = (\bar{a} \cup \bar{b}) \cup c$ (примењујемо аксиоме A_2 и A_1 на корак (2))
(4) $(a \cup \bar{a}) \cup (\bar{b} \cup c) = (\bar{a} \cup \bar{b}) \cup c$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (3))
(5) $I \cup (\bar{b} \cup c) = (\bar{a} \cup \bar{b}) \cup c$ (примењујемо идентитет I_5* на корак (4))
(6) $(\bar{b} \cup c) \cup I = (\bar{a} \cup \bar{b}) \cup c$ (примењујемо аксиому A_1 на корак (5))
(7) $(\bar{a} \cup \bar{b}) \cup c = I$ (примењујемо идентитет I_7 на корак (6))
(8) $\bar{c} \cdot ((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup c) = \bar{c}$ (додајемо $\bar{c}$ и операцију "$\cdot$" са леве стране једнакости)
(9) $(\bar{c} \cdot (\bar{a} \cup \bar{b})) \cup (\bar{c} \cdot c) = \bar{c}$ (примењујемо аксиому A_3* на корак (8))
(9) $((\bar{a} \cup \bar{b}) \cdot \bar{c}) \cup (c \cdot \bar{c}) = \bar{c}$ (примењујемо аксиому A_1* на корак (10))
(11) $((\bar{a} \cup \bar{b}) \cdot \bar{c}) \cup 0 = \bar{c}$ (примењујемо идентитет I_5* на корак (10))
(12) $(\bar{a} \cup \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{c}$ (примењујемо идентитет I_4 на корак (11))
(13) $\overline{((\bar{a} \cup \bar{b}) \cdot \bar{c})} = \bar{\bar{c}}$ (негирамо корак (12))
(14) $(a \cdot b) \cup c = c$ (примењујемо идентитете I_{14}, I_{14}* и I_{12} на корак (13))
(15) $a \cdot b \leqslant c$. (директно следи из дефинције 3.1.)

Доказали смо оба смера еквиваленције, дакле идентитет важи за свако $a, b, c \in B$.

4 Булова алгебра скупа L_2

До сада смо се упознали са Буловом алгербом на неком произвољном непразном скупу B са најмање два елемента. Даље ћемо разматрати Булову алгебру на скупу $L_2 = \{0,1\}$. Она се највише користи, а апарат који се односи на двовредносне промењљиве је још увек најсавршенији.

Све теореме које смо претходно навели за Булову алгебру $(B, \cup, \cdot, -)$ важе и за Булову алгебру $(L_2, \cup, \cdot, -)$. У овом поглављу навешћемо још пар теорема, од којих неке важе и у Буловој алгебри $(B, \cup, \cdot, -)$.

Када смо говорили о моделима Булове алгебре, дефинисали смо бинарне операције "$\cup$" (дисјункција) и "$\cdot$" (конјункција) и унарну операцију "$-$" (негација) на скупу $L_2 = \{0,1\}$ на следећи начин:

1) $0 \cup 0 = 0,\quad 0 \cup 1 = 1,\quad 1 \cup 0 = 1,\quad 1 \cup 1 = 1$
2) $0 \cdot 0 = 0,\quad 0 \cdot 1 = 1,\quad 1 \cdot 0 = 1,\quad 1 \cdot 1 = 1$
3) $\bar{0} = 1,\quad \bar{1} = 0$

Булову алгебру $L_2 = \{0,1\}$, где су уведене бинарне операције "$\cup$" и "$\cdot$" и унарна операција "$-$" зовемо Булова алгебра двочланог скупа (Булова алгебра L_2).

Из дефиниције Булове алгебре и основних теорема које су претходно доказане следи да у Буловој алгебри $(L_2, \cup, \cdot, -)$ за све $a, b, c \in L_2$ важе следећа својства (идентитети):

(S_1) $a \cup b = b \cup a$ | $(S_1{}^*)$ $a \cdot b = b \cdot a$
(S_2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ | $(S_2{}^*)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(S_3) $a \cup a = a$ | $(S_3{}^*)$ $a \cdot a = a$
(S_4) $a \cup (a \cdot b) = a$ | $(S_4{}^*)$ $a \cdot (a \cup b) = a$
(S_5) $a \cup (b \cdot c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c)$ | $(S_5{}^*)$ $a \cdot (b \cup c) = (a \cdot b) \cup (a \cdot c)$
(S_6) $a \cup 1 = 1$ | $(S_6{}^*)$ $a \cdot 0 = 0$
(S_7) $a \cup 0 = a$ | $(S_7{}^*)$ $a \cdot 1 = a$
(S_8) $a \cup \bar{a} = 1$ | $(S_8{}^*)$ $a \cdot \bar{a} = 0$
(S_9) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ | $(S_9{}^*)$ $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$
(S_{10}) $\bar{\bar{a}} = a$
(S_{11}) $a \cup (\bar{a} \cdot b) = a \cup b$ | $(S_{11}{}^*)$ $a \cdot (\bar{a} \cup b) = a \cdot b$

4.1 Булов израз

У овом делу дефинисаћемо Булов израз.
Уведимо на скупу L_2 релацију (R):

$$x^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x \neq \alpha \\ 1, & \text{ако је } x = \alpha, \quad \alpha, x \in L_2 \end{cases}$$

Према дефиницији ове релације важи:
$0^0 = 1,\quad 0^1 = 0,\quad 1^0 = 0,\quad 1^1 = 1.$
На основу корака 3) у ком смо дефинисали негацију и дефиниције релације L_2 важи:
$\bar{x} = x^0,\quad x = x^1$
$\overline{x^\alpha} = x^{\bar{\alpha}},\ \alpha \in L_2$

Даље уводимо следеће релације након чега ћемо да проверимо и докажемо њихову тачност:
$x^\alpha \cdot x^\alpha = x^\alpha,\quad \alpha \in L_2$
$x^\alpha \cdot x^\beta = 0,\quad \alpha, \beta \in L_2, \alpha \neq \beta$
$x^\alpha \cup x^\alpha = x^\alpha,\quad \alpha \in L_2$

$x^\alpha \cup x^\beta = 1, \qquad \alpha, \beta \in L_2, \alpha \neq \beta$

Верификација наведених релација помоћу идентитета S_3, S_3*, S_8 и S_8*:
$x^0 \cdot x^0 = \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x} = x^0$
$x^1 \cdot x^1 = x \cdot x = x = x^1$
$x^0 \cdot x^1 = \bar{x} \cdot x = 0$
$x^0 \cup x^0 = \bar{x} \cup \bar{x} = \bar{x} = x^0$
$x^1 \cup x^1 = x \cup x = x = x^1$
$x^0 \cup x^1 = \bar{x} \cup x = 1$

По договору, симболи 0 и 1 из скупа L_2 зову се Булове константе, а слова $x, y, z, ...$ која узимају вредности 0 и 1 из скупа L_2 Булове променљиве.

Дефиниција 4.1.
4.1.1. Булове константе 0 и 1 и Булове променљиве $x, y, z, ...$ су Булови изрази.
4.1.2. Ако су A и B Булови изрази тада су $(A \cup B)$, $(A \cdot B)$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ такође Булови изрази.
4.1.3. Булови изрази су само они симболи који се добијају коначном применом корака 4.1.1. и 4.1.2.

Примери Булових израза: $0, 1, x, y, z^0, z^1, (x \cup y), (x \cdot y), (x \cdot \bar{x}), ((x \cup 0) \cdot \bar{x}), ((x \cdot 1) \cup y), ...$

4.2 Форме Булових израза

Дефиниција 4.2.
4.2.1. Булови изрази који не садрже дисјункцију зову се елементарне конјункције.
4.2.2. Булови изрази који не садрже конјункцију зову се елементарне дисјункције.

Примери елементарних конјункција: $0, 1, x, y, x \cdot x, x \cdot \bar{x}, x \cdot y, x \cdot y \cdot z, x \cdot \bar{y} \cdot z, x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}, \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$.
Примери елементарних дисјункција: $0, 1, x, y, x \cup x, x \cup \bar{x}, x \cup y, x \cup y \cup z, x \cup \bar{y} \cup z, x \cup \bar{y} \cup \bar{z}, \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}$.

Дефиниција 4.3.
4.3.1. Елементарна конјункција C у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$ зове се канонска елементарна конјункција ако свака променљива x_k (или њена негација $\overline{x_k}, k = 1, ..., n$) узета једном (и само она) учествује у изградњи конјункције C.
4.3.2. Елементарна дисјункција D у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$ зове се канонска елементарна дисјункција ако свака променљива x_k (или њена негација $\overline{x_k}, k = 1, ..., n$) узета једном (и само она) учествује у изградњи дисјункције D.

Сада ћемо на примерима ближе објаснити канонску конјункцију и дисјункцију.

Елементарне конјункције:
$x \cdot y \cdot \bar{z}, \;\; \bar{x} \cdot y \cdot z, \;\; \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
су канонске елементарне конјункције у односу на променљиве x, y, z, док елементарна конјункција $x \cdot \bar{y}$ није канонска елементарна конјункција у односу на x, y, z јер не садржи ни z ни $\bar{z}$.
Ове три елементарне канонске конјункције $x \cdot y \cdot \bar{z}, \bar{x} \cdot y \cdot z, \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ можемо записати и као:
$x^1 \cdot y^1 \cdot z^0, \;\; x^1 \cdot y^1 \cdot z^1, \;\; x^0 \cdot y^0 \cdot z^0.$
Генерално, канонска елементарна конјункција C у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$ може се записати у облику:
$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$, где је $\alpha_i \in L_2, i = 1, 2, .., n$.

Елементарне дисјункције:
$x \cup y \cup \bar{z}, \;\; \bar{x} \cup y \cup z, \;\; \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}$

су канонске елементарне дисјункције у односу на променљиве x, y, z, док елементарна дисјункција $x \cup \bar{y}$ није канонска елементарна дисјункција у односу на x, y, z јер не садржи ни z ни $\bar{z}$. Ове три елементарне канонске дисјункције $x \cup y \cup \bar{z}$, $\bar{x} \cup y \cdot z$, $\bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}$ можемо записати и као:

$x^1 \cup y^1 \cup z^0, \quad x^0 \cup y^1 \cup z^1, \quad x^0 \cup y^0 \cup z^0.$

Генерално, канонска елементарна дисјункција D у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$ може се записати у облику:

$x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup ... \cup x_n^{\alpha_n}, \quad$ где је $\alpha_i \in L_2, i = 1, 2, .., n.$

Дефиниција 4.4.

4.4.1. Булов израз облика

$C_1 \cup C_2 \cup .. \cup C_n$

где су $C_1, C_2, ..., C_n$ елементарне конјункције, зове се дисјунктивна форма (ДФ).

4.4.2. Булов израз облика

$D_1 \cdot D_2 \cdot .. \cdot D_n$

где су $D_1, D_2, ..., D_n$ елементарне дисјункције, зове се конјуктивна форма (КФ).

Навешћемо пар примера дисјунктивне и конјуктивне форме.

Дисјунктивне форме: $x \cup (x \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot y \cdot z)$, $\bar{x} \cup (\bar{x} \cdot y \cdot z) \cup (x \cdot y \cdot \bar{z})$,$(\bar{x} \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y} \cdot z) \cup (x \cdot y \cdot z) \cup x$.

Конјуктивне форме: $x \cdot (x \cup y) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z)$, $\bar{x} \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (x \cup y \cup \bar{z})$, $(\bar{x} \cup y) \cdot (x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (x \cup y \cup z) \cdot x$.

Дефиниција 4.5.

4.5.1. Дисјунктивна форма

$\bigcup_{i=1}^{m} C_i$

зове се дисјунктивна нормална форма (КДНФ) у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$, ако су $C_1, C_2, ..., C_m$ канонске елементарне конјункције у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$.

4.5.2. Конјуктивна форма

$\prod_{i=1}^{m} D_i$

зове се конјуктивна нормална форма (ККНФ) у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$, ако су $D_1, D_2, ..., D_m$ канонске елементарне дисјункције у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$.

Навешћемо пар примера канонске дисјунктивне и канонске конјуктивне форме.

Булови изрази:

$(x \cdot y \cdot z) \cup (x \cdot \bar{y} \cdot z) \cup (\bar{x} \cdot y \cdot z) \cup (x \cdot y \cdot \bar{z})$

$(x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})$

$(\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cup (x \cdot y \cdot z)$

су канонске дисјунктивне нормалне форме у односу на променљиве x, y и z, док Булов израз $(x \cdot \bar{y} \cdot z) \cup (\bar{x} \cdot y \cdot z) \cup (x \cdot y)$ није канонска дисјунктивна форма у односу на променљиве x, y и z јер конјункција $x \cdot y$ није канонска елементарна конјункција у односу на променљиве x, y и z пошто не садржи ни z ни $\bar{z}$.

Булови изрази:

$(x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (x \cup y \cup \bar{z})$

$(x \cup \bar{y} \cup \bar{z}) \cdot (\bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z})$

$(\bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}) \cdot (\bar{x} \cup \bar{y} \cup z) \cdot (x \cup y \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup z)$

су канонске дисјунктивне нормалне форме у односу на променљиве x, y и z, док Булов израз $(x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (\bar{x} \cup \bar{y})$ није канонска дисјунктивна форма у односу на променљиве x, y и z јер дисјункција $\bar{x} \cup \bar{y}$ није канонска елементарна дисјункција у односу на променљиве x, y и z пошто не садржи ни z ни $\bar{z}$.

4.3 Теореме о нормалним формама

Означимо са L_2^n директни производ n скупова L_2:

$L_2^n = \underbrace{L_2 \cdot L_2 \cdot ... \cdot L_2}_{n \text{ пута}}$

Директни производ L_2^n је скуп уређених n-торки $(a_1, a_2, .., a_n)$, где је $a_i \in L_2$, $i = 1, 2, ..., n$, односно $L_2^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in L_2, i = 1, 2, ..., n\}$.
Постоји 2^n различитих уређених n-торки у L_2^n, то јест, скуп L_2^n садржи 2^n елемената. Свака од a_i где је $i \in 1, 2, ..., n$ узима једну од вредности 0 или 1, па је укупан број варијација са понављањем од два елемента n-те класе 2^n.

Примери скупова и одређивање броја њихових елемената.
Дат је скуп:

$L_2^2 = L_2 \cdot L_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Користећи претходно наведену формулу за израчунавање броја елемената скупа L_2^n израчунавамо да је број елемената овог скупа: $2^2 = 4$ елемената (уређених двојки).
Дат је скуп:

$L_2^3 = L_2 \cdot L_2 \cdot L_2 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

Дат скуп има $2^3 = 8$ елемената (уређених тројки).

Теорема 4.1.
За променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$ постоји 2^n различитих канонских конјункција облика

(T_1) $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$,

односно 2^n различитих дисјункција облика

$(T_1{*})$ $x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup ... \cup x_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$.

Доказ.
Како свака конјункција (дисјункција) облика T_1 $(T_1{*})$ садржи све изразе $x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, ..., n$; према већ датим релацијама $\bar{x} = x^0$, $x = x^1$ имамо варијације са понављањем од два елемента n-те класе, то јест 2^n конјункција (дисјункција).

Теорема 4.2.
Дисјункција свих канонских конјункција облика T_1 једнака је 1, односно:

(T_2) $\bigcup\limits_{\alpha \in L_2^n} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} = 1$.

Конјункција свих канонских дисјункција облика $T_1{*}$ једнака је 0, односно:

$(T_2{*})$ $\prod\limits_{\alpha \in L_2^n} x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup ... \cup x_n^{\alpha_n} = 0$.

Доказ.
(T_2) Нека је $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in L_2^n$ и $E_1(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \bigcup \beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_n^{\alpha_n}$.

Постоји 2^n конјункција облика T_1. Конјункције $\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_n^{\alpha_n}, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$ имају на основу релација $\bar{x} = x^0$, $x = x^1$ вредности 0 или 1:

$$\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \text{ако је } (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ 0, & \text{ако је } (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \neq (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n). \end{cases}$$

Према овоме, постоји само једна конјункција облика $\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_n^{\alpha_n}, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$ која је једнака 1, па је тврђење T_2 на основу идентитета $a \cup 1 = 1$ испуњено.

$(T_2{*})$ Нека је $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in L_2^n$ и $E_2(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \prod\limits_{\alpha_n \in L_2^n} (\beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup ... \cup \beta_n^{\alpha_n})$.

Постоји 2^n дисјункција облика $T_1{*}$. Дисјункције $\beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup ... \cup \beta_n^{\alpha_n}, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$ имају на основу релација $\bar{x} = x^0$, $x = x^1$ вредности 0 или 1:

$$\beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup ... \cup \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \alpha_1 \neq \beta_1, \alpha_2 \neq \beta_2, ..., \alpha_n \neq \beta_n \\ 1, & \text{у свим осталим случајевима.} \end{cases}$$

Према овоме, постоји само једна дисјункција облика $\beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup ... \cup \beta_n^{\alpha_n}, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n$ која је једнака 0, па је тврђење $T_2{}^*$ на основу идентитета $a \cdot 0 = 0$ испуњено.

Теорема 4.3.
Конјункција ма које две различите канонске конјункције облика T_1 једнака је 0, односно:
(T_3) $(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}) \cdot (x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot x_n^{\beta_n}) = 0,$
где је $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n, \quad (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in L_2^n$ и $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.
Дисјункција ма које две различите канонске дисјункције облика $T_1{}^*$ једнака је 1, односно:
$(T_3{}^*)$ $(x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup ... \cup x_n^{\alpha_n}) \cup (x_1^{\beta_1} \cup x_2^{\beta_2} \cup ... \cup x_n^{\beta_n}) = 1,$
где је $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in L_2^n, \quad (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in L_2^n$ и $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.

Доказ.
(T_3) Нека је $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Тада постоји бар једно i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ тако да је $\alpha_i \neq \beta_i$. На основу релације $x^\alpha \cdot x^\beta = 0$, $\alpha, \beta \in L_2, \alpha \neq \beta$ следи да је:
$x_i^{\alpha_i} \cdot x_i^{\beta_i} = 0.$
Користећи идентитет $a \cdot 0 = 0$ доказали смо теорему.

$(T_3{}^*)$ Нека је $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Тада постоји бар једно i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ тако да је $\alpha_i \neq \beta_i$. На основу релације $x^\alpha \cup x^\beta = 1$, $\alpha, \beta \in L_2, \alpha \neq \beta$ следи да је:
$x_i^{\alpha_i} \cup x_i^{\beta_i} = 1.$
Користећи идентитет $a \cup 1 = 1$ доказали смо теорему.

Теорема 4.4.
Сваки Булов израз који садржи неке од промељивих $x_1, x_2, ..., x_n$ може се трансформисати у КДНФ (ККНФ) у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$.

Доказ.
За доказивање ове теореме користићемо претходно доказане теореме. Нека је E Булов израз. Користећи својства Булове алгебре, дати израз E можемо трансформисати у ДФ (КФ). Ако је E баш КДНФ (ККНФ) доказали смо да важи дата теорема. Ако израз E није КДНФ (ККНФ) онда постоји бар једна елементарна конјункција C (дисјункција D) која није канонска елементарна конјункција (дисјункција). Даље, ако конјункције C' (дисјункције D') не садрже променљиву x или $\bar{x}$ можемо писати:
$C' = C' \cdot (x \cup \bar{x}) = (C' \cdot x) \cup (C' \cdot \bar{x}),$
$D' = D' \cup (x \cdot \bar{x}) = (D' \cup x) \cdot (D' \cup \bar{x}).$

Дакле, свака конјункција (дисјункција) може се трансформисати у КДНФ (ККНФ).

Теорема 4.5.
Булов израз E је КДНФ у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$ ако и само ако је израз $\bar{E}$ ККНФ у односу на променљиве $x_1, x_2, ..., x_n$.

Доказ.
Ако је израз E КДНФ онда је свака конјункција која учествује у изградњи израза E елементарна канонска конјункција, односно:
$E = \bigcup\limits_{\alpha \in M} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$, где је $M \subset L_2^n$.
Негацијом овог израза добијамо:
$$\bar{E} = \overline{\bigcup_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in M} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}}.$$

Како бисмо средили негиран израз користимо Де Морганове законе и релацију (R):

$$\bar{E} = \prod_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in M} (x_1^{\bar{\alpha_1}} \cup x_2^{\bar{\alpha_2}} \cup \dots \cup x_n^{\bar{\alpha_n}}).$$

Овим је један смер еквиваленције доказан. Остало нам је још да докажемо други смер.
Нека је E ККНФ. Онда је свака дисјункција која учествује у изградњи израза E елементарна канонска дисјункција, односно:

$$E = \prod_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in M} (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \dots \cup x_n^{\alpha_n}), \text{ где је } M \subset L_2^n.$$

Негацијом овог израза добијамо:

$$\bar{E} = \overline{\prod_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in M} (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \dots \cup x_n^{\alpha_n})}.$$

Како бисмо средили негиран израз користимо Де Морганове законе и релацију (R):

$$\bar{E} = \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in M} x_1^{\bar{\alpha_1}} \cdot x_2^{\bar{\alpha_2}} \cdot \dots \cdot x_n^{\bar{\alpha_n}}.$$

Овим смо доказали и други смер еквиваленције, дакле, теорема је доказана.

4.4 Примери

Пример 4.1.
За променљиве x, y постоји $2^2 = 4$ канонских конјункција и $2^2 = 4$ канонских дисјункција облика T_1.

Решење.
Исписаћемо све могуће комбинације канонских дисјункција (дисјункција).
Канонске конјункције:

$x^1 \cdot y^1,\ x^1 \cdot y^0,\ x^0 \cdot y^1,\ x^0 \cdot y^0$, другачије записано: $x \cdot y,\ x \cdot \bar{y},\ \bar{x} \cdot y,\ \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Канонске дисјункције:

$x^1 \cup y^1,\ x^1 \cup y^0,\ x^0 \cup y^1,\ x^0 \cup y^0$, другачије записано: $x \cup y,\ x \cup \bar{y},\ \bar{x} \cup y,\ \bar{x} \cup \bar{y}$.

Исписивањем свих могућих комбинација добија се да је решење и за конјункцију и за дисјункцију заиста $2^2 = 4$.

Пример 4.2.
За променљиве x, y дисјункција свих канонских конјункција једнака је 1:

$(x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y}) \cup (\bar{x} \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y}) = 1$.

За променљиве x, y конјункција свих канонских дисјункција једнака је 0:

$(x \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) \cdot (\bar{x} \cup y) \cdot (\bar{x} \cup \bar{y}) = 0$.

Решење.
За доказивање ових тврдњи користићемо идентитете $S_5{*}$ (S_5), S_8 $(S_8{*})$ и $S_7{*}$ (S_7).

$(x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y}) \cup (\bar{x} \cdot y) \cup (\bar{x} \cdot \bar{y}) = (x \cdot (y \cup \bar{y})) \cup (\bar{x} \cdot (y \cup \bar{y})) = (x \cdot 1) \cup (\bar{x} \cdot 1) = x \cup \bar{x} = 1$.

$(x \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) \cdot (\bar{x} \cup y) \cdot (\bar{x} \cup \bar{y}) = (x \cup (y \cdot \bar{y})) \cdot (\bar{x} \cup (y \cdot \bar{y})) = (x \cup 0) \cdot (\bar{x} \cdot 0) = x \cdot \bar{x} = 0$.

Пример 4.3.
Трансформисати Булов израз $x \cup y$ за променљиве x, y у КДНФ.

Решење.
За трансформисање датог израза у КДНФ користићемо следеће идентитете: $S_6{*}$, S_8, $S_5{*}$, S_1 и S_3.

$x \cup y = (x \cdot 1) \cup (y \cdot 1) = (x \cdot (y \cup \bar{y})) \cup (y \cdot (x \cup \bar{x})) = ((x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y})) \cup ((y \cdot x) \cup (y \cdot \bar{x})) = (x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{y}) \cup (\bar{x} \cdot y)$.

Пример 4.4.
Трансформисати Булов израз $x \cup (\bar{x} \cdot y)$ за променљиве x, y у ККНФ.

Решење.
За трансформисање датог израза у ККНФ користићемо следеће идентитете: S_5, S_8 и S_7*.
$x \cup (\bar{x} \cdot y) = (x \cup \bar{x}) \cdot (x \cup y) = 1 \cdot (x \cup y) = x \cup y$.

Пример 4.5.
Трансформисати Булов израз $(x \cdot (y \cup \bar{z})) \cup (x \cdot z)$ за промењиве x, y, z у КДНФ.

Решење.
За трансформисање датог израза у КДНФ користићемо следеће идентитете: S_5*, S_7*, S_8, S_5*, S_1 и S_3*.
$(x \cdot (y \cup \bar{z})) \cup (x \cdot z) = (x \cdot y) \cup (x \cdot \bar{z}) \cup (x \cdot z) = (x \cdot y \cdot (z \cup \bar{z})) \cup (x \cdot \bar{z} \cdot (y \cup \bar{y})) \cup (x \cdot z \cdot (y \cup \bar{y})) =$
$(x \cdot y \cdot z) \cup (x \cdot y \cdot \bar{z}) \cup (x \cdot \bar{z} \cdot y) \cup (x \cdot \bar{z} \cdot \bar{y}) \cup (x \cdot z \cdot y) \cup (x \cdot z \cdot \bar{y}) = (x \cdot y \cdot z) \cup (x \cdot y \cdot \bar{z}) \cup (x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cup (x \cdot \bar{y} \cdot z)$.

Пример 4.6.
Трансформисати Булов израз $(x \cup \bar{y}) \cdot (\bar{x} \cup y) \cdot z$ за промењиве x, y, z у ККНФ.

Решење.
За трансформисање датог израза у ККНФ користићемо следеће идентитете: S_6, S_8 и S_5.
$(x \cup \bar{y}) \cdot (\bar{x} \cup y) \cdot z = (x \cup \bar{y} \cup (z \cdot \bar{z})) \cdot (\bar{x} \cup y \cup (z \cdot \bar{z})) \cdot (z \cup (x \cdot \bar{x}) \cup (y \cdot \bar{y})) = (x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup \bar{z}) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup \bar{z}) \cdot$
$((z \cup x) \cdot (z \cup \bar{x}) \cup (y \cdot \bar{y})) = (x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup \bar{z}) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup \bar{z}) \cdot (z \cup x \cup y) \cdot (z \cup x \cup \bar{y}) \cdot (z \cup \bar{x} \cup y) \cdot (z \cup \bar{x} \cup \bar{y}) =$
$(x \cup y \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup \bar{z}) \cdot (\bar{x} \cup \bar{y} \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup z)$.

5 Примена Булове алгебре

Булова алгебра има велику примену у многим наукама као што су математика, техника, рачунарство, економија, инжењерство итд. У овом раду бавићемо се применом Булове алгебре на дигиталну технику, конкретније на логичка кола. Представићемо основна и сложена (изведена) логичка кола, кроз таблице истинитости испитати како се понашају на скупу $\{0,1\}$ и приказати њихов изглед у дигиталним колима.

5.1 Логичка кола

Логичко коло (капија) је електронски склоп састављен од прекидачких елемената који има бар један улаз и бар један излаз. Може се конструисати од вентила, релеја, диода или оптичких елемената. Први патент за електромеханичко коло И (AND) затражио је Никола Тесла 1899. године. Клод Шенон уводи коришћење Булове алгебре у анализу и дизајн самих кола 1937. године. Прво електрично коло прави Волтер Бот (проналазач подударних кола) 1924. године, да би касније, 1954. године, добио и Нобелову награду за овај изум.

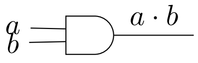
Постоје три основна типа логичких кола који се заснивају на основним логичким функцијама, а то су кола И (AND), ИЛИ (OR) и НЕ (NOT). Модификацијом ова три основна кола могуће је конструисати комплекснија кола попут НИ (NAND), НИЛИ (NOR), ЕКСИЛИ (XOR) и НЕКСИЛИ (XNOR). Приликом решавања сложених логичких израза, управо се нека од ових комплекснијих кола користе у реализацији. Добар пример је коло НИ (NAND) које се користи за конструисање логичких кола која садрже најмањи број транзистора. Поред тога, почевши од НИ (NAND) кола можемо доћи до НЕ (NOT) кола, затим и до И (AND) кола, и на крају, применом Де Моргановых правила и до ИЛИ (OR) кола. Сва сложена кола могу се реализовати применом само једног кола (НИ кола), па се овим обезбеђује униформност и једноставност логичког пројектовања на кола. Операнди у колима узимају две вредности: 0 и 1 (0 се узима уколико је прекидач искључен, а 1 уколико је прекидач укључен).

5.2 И (AND) коло

Логичко коло И (AND) приказује и представља једну од основних операција Булове алгебре, а то је конјункција ” · ”.
Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од два операнда (A и B) и једног оператора (конјункције) и тако показати како се понаша И (AND) коло.

УЛАЗ		ИЗЛАЗ
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Коло И (AND) враћа као излаз 1, само уколико су сви улази такође 1 - коло ће проводити струју само уколико су оба прекидача укључена. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола И (AND) у дигиталном логичком колу.

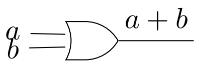


5.3 ИЛИ (OR) коло

Логичко коло ИЛИ (OR) приказује и представља једну од основних операција Булове алгебре, а то је дисјункција " $\cup$ ".
Знак дисјункције " $\cup$ " ћемо заменити и уместо њега, за сваку дисјункцију писаћемо " + ".
Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од два операнда (A и B) и једног оператора (дисјункције) и тако показати како се понаша ИЛИ (OR) коло.

УЛАЗ		ИЗЛАЗ
A	B	$A+B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Коло ИЛИ (OR) враћа као излаз 1, уколико је бар један од улаза такође 1 - коло ће проводити струју уколико је укључен бар један прекидач. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола ИЛИ (OR) у дигиталном логичком колу.

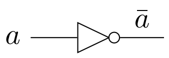


5.4 НЕ (NOT) коло

Логичко коло НЕ (NOT) приказује и представља једну од основних операција Булове алгебре, а то је негација " $-$ ".
Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од једног операнда (A) и једног оператора (негације) и тако показати како се понаша НЕ (NOT) коло.

УЛАЗ	ИЗЛАЗ
A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Коло НЕ (NOT) враћа као излаз 1, уколико је улаз 0 - коло ће проводити струју уколико је прекидач искључен. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола НЕ (NOT) у дигиталном логичком колу.



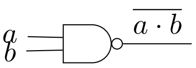
5.5 НИ (NAND) коло

Након што смо показали како изгледају и како се понашају основна логичка кола, показаћемо и најкоришћенија изведена кола.

Логичко коло НИ (NAND) представља једну од изведених операција Булове алгебре, а добија се комбиновањем две основне операције Булове алгебре: И (AND) и НЕ (NOT), тако што се операција И (AND) негира.
Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од два операнда (A и B) и комбинованог оператора (НИ) и тако показати како се понаша НИ (NAND) коло.

УЛАЗ		ИЗЛАЗ
A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Коло НИ (NAND) враћа као излаз 1, уколико је тачно један од два улаза такође 1 или уколико су оба улаза 0 - коло ће проводити струју уколико је укључен тачно један прекидач или су оба прекидача искључена. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола НИ (NAND) у дигиталном логичком колу.



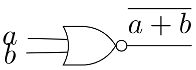
5.6 НИЛИ (NOR) коло

Логичко коло НИЛИ (NOR) представља једну од изведених операција Булове алгебре, а добија се комбиновањем две основне операције Булове алгебре: ИЛИ (OR) и НЕ (NOT), тако што се операција ИЛИ (OR) негира.

Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од два операнда (A и B) и комбинованог оператора (НИЛИ) и тако показати како се понаша НИЛИ (NOR) коло.

УЛАЗ		ИЗЛАЗ
A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Коло НИЛИ (NOR) враћа као излаз 1, само уколико су оба улаза 0 - коло ће проводити струју само уколико су искључена оба прекидача. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола НИЛИ (NOR) у дигиталном логичком колу.



5.7 ЕКСИЛИ (XOR) коло

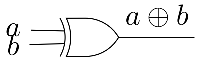
Логичко коло ЕКСИЛИ (XOR) представља једну од изведених операција Булове алгебре, а добија се комбиновањем три основне операције Булове алгебре: И (AND), ИЛИ (OR) и НЕ (NOT). Ова операција се још назива и искључиво-или.

$A \oplus B = (A + B) \cdot (\overline{A \cdot B})$

Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од два операнда (A и B) и комбинованог оператора (ЕКСИЛИ) и тако показати како се понаша ЕКСИЛИ (XOR) коло.

УЛАЗ		ИЗЛАЗ
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Коло ЕКСИЛИ (XOR) враћа као излаз 1, уколико је тачно један улаз такође 1 - коло ће проводити струју само уколико је укључен тачно један прекидач. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола ЕКСИЛИ (XOR) у дигиталном логичком колу.



5.8 ЕКСНИЛИ (XNOR) коло

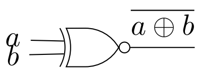
Логичко коло ЕКСНИЛИ (XNOR) представља једну од изведених операција Булове алгебре, а добија се комбиновањем три основне операције Булове алгебре: И (AND), ИЛИ (OR) и НЕ (NOT). Ова операција је још назива и искључиво-нили.

$\overline{A \oplus B} = (A \cdot B) + \overline{A + B}$

Креираћемо таблицу истинитости која се састоји од два операнда (A и B) и комбинованог оператора (ЕКСНИЛИ) и тако показати како се понаша ЕКСНИЛИ (XNOR) коло.

УЛАЗ		ИЗЛАЗ
A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

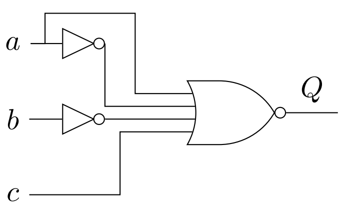
Коло ЕКСНИЛИ (XNOR) враћа као излаз 1, уколико су оба улаза такође 1 или уколико су оба улаза 0 - коло ће проводити струју уколико су оба прекидача укључена или уколико су оба прекидача искључена. Након креирања таблице истинитости приказаћемо изглед кола ЕКСНИЛИ (XNOR) у дигиталном логичком колу.



5.9 Примери

Након навођења основних кола у Буловој алгебри навешћемо и решићемо пар примера сложених дигиталних кола.

Пример 5.1.
За дато коло и вредности a, b, c израчунати крајњи резултат Q проласка кроз ово коло и креирати таблицу истинитости за сваки део кола.



Решење.
Дато коло састоји од три претходно наведена кола, а то су: два НЕ кола и једно НИЛИ коло. Кроз једно НЕ коло пролази променљива a, а кроз друго НЕ коло пролази променљива b. Када a и b прођу кроз НЕ кола постају $\bar{a}$ и $\bar{b}$. У НИЛИ коло улазе променљиве a, c и $\bar{a}$ и $\bar{b}$ које су претходно прошле кроз НЕ кола. Дакле након проласка ових променљивих кроз НИЛИ коло, резултат који се добије је:

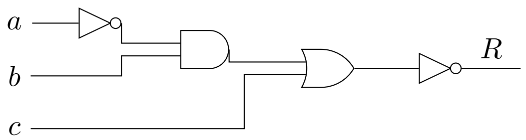
$Q = \overline{a + \bar{a} + \bar{b} + c} = \bar{a} \cdot a \cdot b \cdot \bar{c}.$

Након што смо написали Булов израз за ово коло, креираћемо таблицу истинитости.

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a+\bar{a}+\bar{b}+c$	$Q=\overline{a+\bar{a}+\bar{b}+c}$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0

На основу таблице истинитости можемо видети да је резултат датог кола увек 0.

Пример 5.2.
За дато коло и вредности a, b, c израчунати крајњи резултат R проласка кроз ово коло и креирати таблицу истинитости за сваки део кола.



Решење.
Дато коло састоји од четири кола: два НЕ кола, једног И кола и једног ИЛИ кола. Кроз прво НЕ коло пролази променљива a након чијег проласка добијамо $\bar{a}$. У И коло даље улазе $\bar{a}$ и променљива b. Проласком кроз И коло добија се $\bar{a}\cdot b$. Даље, у ИЛИ коло улази резултат из И кола $\bar{a}\cdot b$ и променљива c и добија се израз: $(\bar{a}\cdot b)+c$. У последње НЕ коло улази израз $(\bar{a}\cdot b)+c$ који се негира и као крајње решење добија се:

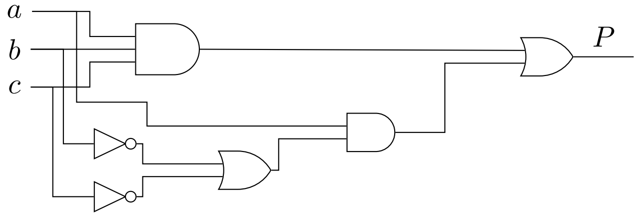
$$R=\overline{(\bar{a}\cdot b)+c}=(a+\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

Након што смо написали Булов израз за ово коло, креираћемо таблицу истинитости.

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{a}\cdot b$	$(\bar{a}\cdot b)+c$	$R=\overline{(\bar{a}\cdot b)+c}$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0

На основу таблице истинитости можемо видети да је резултат датог кола 1 уколико су вредности улаза за a, b и c редом: 0,0,0 или 1,0,0 или 1,1,0.

Пример 5.3.
За дато коло и вредности a, b, c израчунати крајњи резултат P проласка кроз ово коло и креирати таблицу истинитости за сваки део кола.



Решење.
Дато коло састоји од шест кола: два НЕ кола, два И кола и два ИЛИ кола. Кроз прво И коло пролазе све три почетне промењиве a, b и c. Након проласка, израз који се добије је $a \cdot b \cdot c$ и он ће уђи у последње коло, ИЛИ коло, након којег добијамо финални резултат P. Промењиве b и c се гранају и улазе у засебна НЕ кола. Када b уђе у НЕ коло добије се $\bar{b}$, а када c уђе у НЕ коло добије се $\bar{c}$. Та два израза даље улазе у ИЛИ коло, из ког се добија израз $\bar{b} + \bar{c}$. Промењива a се грана и њена вредност улази у друго И коло заједно са изразом $\bar{b} + \bar{c}$. Из другог И кола добија се израз $a \cdot (\bar{b} + \bar{c})$, који улази у последње или коло. Као крајњи резултат добија се израз:
$P = (a \cdot b \cdot c) + (a \cdot (\bar{b} + \bar{c})) = (a \cdot b \cdot c) + (a \cdot \bar{b}) + (a \cdot \bar{c})$.

Након што смо написали Булов израз за ово коло, креираћемо таблицу истинитости.

a	b	c	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{b}+\bar{c}$	$a \cdot (\bar{b}+\bar{c})$	$a \cdot b \cdot c$	$P = (a \cdot b \cdot c) + (a \cdot (\bar{b}+\bar{c}))$
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1

На основу таблице истинитости можемо видети да је резултат датог кола 1 уколико су вредности улаза за a, b и c редом: 1,0,0 или 1,0,1 или 1,1,0 или 1,1,1.

6 Закључак

У овом раду приказали смо дефиниције, аксиоме, теореме и примере у Буловој алгебри на неком непразном скупу B са најмање два елемента, а затим и на конкретном скупу L_2 који има тачно два елемента 1 и 0. Вредности 1 и 0 могу се означавати и као тачно и нетачно, где 1 представља тачно, а 0 нетачно. Због своје једноставности, Булова алгебра скупа L_2 примењена је у многим наукама, па смо тако у овом раду показали и једну од основних примена - примену на дигитална кола у рачунарству. Свако коло имплементира Булову операцију и једноставним решавањем сваког кола засебно долазимо до крајњег израза (решења) целог дигиталног кола.

Желела бих да се захвалим свом ментору, професорки Милици Мисојчић, на уложеном труду, бескрајном стрпљењу, помоћи и подршци током писања самог рада као и на пренетом знању из анализе са алгебром током школовања у Математичкој гимназији.

7 Литература

[1] Koriolan Gilezan, Boško Latinović (1977) *Bulova algebra i primene*

[2] IVY TECH, COMMUNITY COLLEGE (2015) *Math 3 - Quantitative reasoning*

[3] Žarko Mijajlović (2012) *Bulove algebre*

[4] Jovan Đorđević (2013) *Osnovi računarske tehnike 1*

[5] Elliott Mendelson (1970) *Schaum's outline series theory and problems of Boolean Algebra and Switching Circuits*

[6] Vujo Drndarević (2016) *Elementi elektrotehnike - digitalna kola*

[7] Logička kola, `https://en.wikipedia.org/wiki/Logic_gate`
Последњи приступ сајту: 25.05.2020.

[8] Bulova algebra, `https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_algebra`
Последњи приступ сајту: 25.05.2020.